CHAPTER 04 미분의 응용

SECTION 4.1 최댓값과 최솟값

유제 4-1

최댓값은 $f(0)=0$, 최솟값은 존재하지 않는다.

유제 4-2

최솟값은 $f(0)=0$이고 최댓값은 $f(2)=8$이다.

유제 4-3

$\frac{3}{2}$

유제 4-4

최댓값은 $f(2)=3$, 최솟값은 $f(0)=-1$

4.1 연습문제

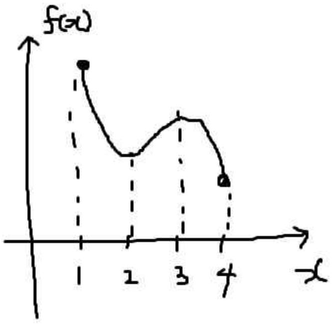
01

거짓이다. 반례 : 구간 $[-1,1]$에서 $f(x)=x^3$

02

거짓이다. 반례 : 구간 $(1,2)$에서 $f(x)=\frac{1}{x}$

03



04

1

05

임계수는 없다.

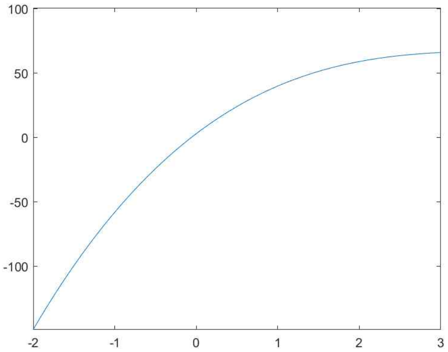
06

$\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}$

CHAPTER 04 미분의 응용

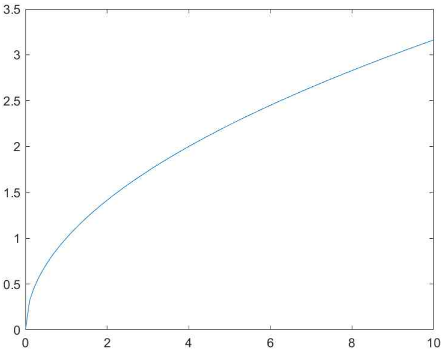
07

$f(3)=66$이 최댓값, $f(-2)=-65$가 최솟값



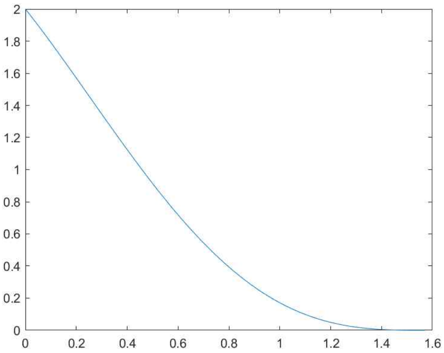
08

최댓값은 존재하지 않고 $f(0)=0$이 최솟값이다.



09

$f(0)=2$이 최댓값이고 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$이 최솟값이다.



10

$f(0)=4$이 최댓값이다. $f(1)=0$이 극솟값이자 최솟값이고, 극댓값은 존재하지 않는다.

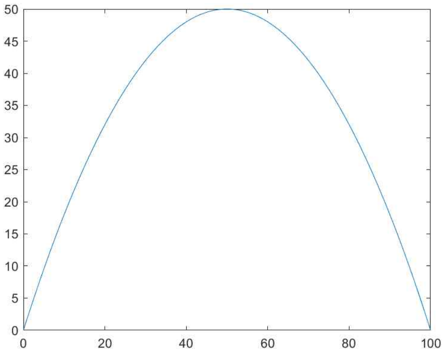
11

증명 생략

CHAPTER 04 미분의 응용

12

$N=50$일 때 인구 성장률이 최대다.



CHAPTER 04 미분의 응용

SECTION 4.2 평균값 정리

유제 4-5

증명 생략.

$c=0$

유제 4-6

$f(3)$이 될 수 있는 가장 작은 값은 7이다.

4.2 연습문제

01

$c=2$

02

$c=\frac{1}{4}$

03

$c=\frac{\pi}{12}$

04

$c=1$

05

$c=0$

06

평균값 정리의 조건을 만족하지 않는다.

07

증명 생략.

08

증명 생략.

09

증명 생략.

10

$\frac{5}{2}$

11

$s'(t)=\frac{3}{10}t^2$

12

$t=\sqrt{\frac{25}{3}}$

CHAPTER 04 미분의 응용

SECTION 4.3 도함수와 그래프 모양

유제 4-7

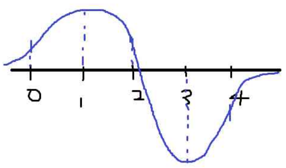
$x > \frac{1}{\sqrt{3}}$ 또는 $x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$ 에서 증가한다.

$-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$ 에서 감소한다.

유제 4-8

$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{9}$ 이 극댓값이고 $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$ 이 극솟값이다.

유제 4-9



유제 4-10

$x < 0$에서 위로 볼록, $x > 0$에서 아래로 볼록, $x = 0$이 변곡점이다.

$f(-1) = 4$는 극댓값이고, $f(1) = -2$는 극솟값이다.

4.3 연습문제

01

참이다.

02

거짓이다.

03

참이다.

04

거짓이다.

05

거짓이다.

06

전체구간에서 증가하고 극댓값, 극솟값은 존재하지 않는다.

$x = 2$에서 변곡점을 갖고 $x < 2$에서 위로 볼록하고 $x > 2$에서 아래로 볼록하다.

07

전체구간에서 증가하고 극댓값, 극솟값은 존재하지 않는다.

변곡점은 갖지 않고 전체구간에서 위로 볼록하다.

CHAPTER 04 미분의 응용

08

구간 $\left[2n\pi, \left(\frac{3}{4}+2n\right)\pi\right]$, $\left[\left(\frac{7}{4}+2n\right)\pi, 2(n+1)\pi\right]$에서 증가하고 구간 $\left[\left(\frac{3}{4}+2n\right)\pi, \left(\frac{7}{4}+2n\right)\pi\right]$에서 감소하며,

$f\left(\left(\frac{3}{4}+2n\right)\pi\right)=1$이 극댓값, $f\left(\left(\frac{7}{4}+2n\right)\pi\right)=-1$이 극솟값이다.

$x=\left(\frac{1}{4}+n\right)\pi$에서 변곡점을 가지며

구간 $\left(\left(\frac{1}{4}+2n\right)\pi, \left(\frac{5}{4}+2n\right)\pi\right)$에서 아래로 볼록, 구간 $\left(\left(\frac{5}{4}+2n\right)\pi, \left(\frac{9}{4}+2n\right)\pi\right)$에서 위로 볼록하다.

09

$x>\sqrt{3}$, $x<-\sqrt{3}$에서 증가하고 $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$에서 감소하며,

$f(\sqrt{3})=\frac{2\sqrt{3}}{3}$이 극댓값, $f(-\sqrt{3})=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$이 극솟값이다.

변곡점은 존재하지 않고, $x>0$에서 아래로 볼록, $x<0$에서 위로 볼록하다.

10

$x<0$, $\frac{8}{5}<x\le 2$에서 감소하고 $0<x<\frac{8}{5}$에서 증가하며,

$f\left(\frac{8}{5}\right)=\frac{64\sqrt{10}}{125}$이 극댓값, $f(0)=0$이 극솟값이다.

$x=\frac{24-4\sqrt{6}}{15}$에서 변곡점을 갖고

$x<24-4\sqrt{6}$에서 아래로 볼록, $x>24-4\sqrt{6}$에서 위로 볼록하다.

CHAPTER 04 미분의 응용

11

$f(x) = 10x^3 - 15x^2 + 5$

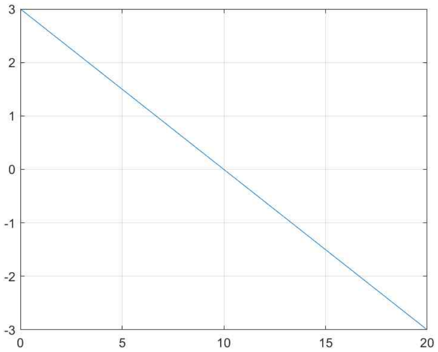
12

증명 생략.

13

c에서 극댓값 또는 극솟값을 갖지 않는다. $x = c$에서 변곡점을 갖는다.

14



15

모든 구간에서 감소한다.

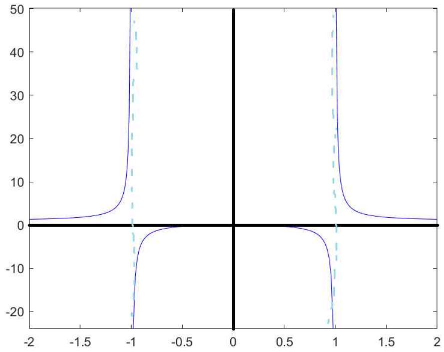
16

감소한다.

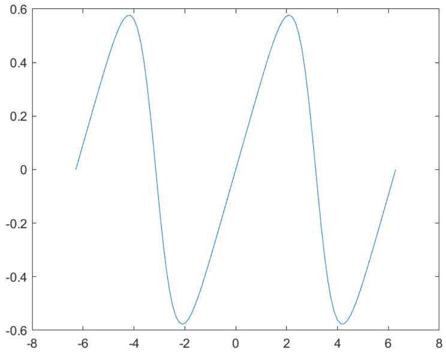
CHAPTER 04 미분의 응용

SECTION 4.4 함수의 그래프 그리는 방법

유제 4-11

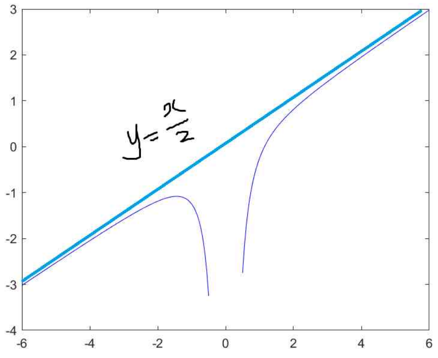


유제 4-12



유제 4-13

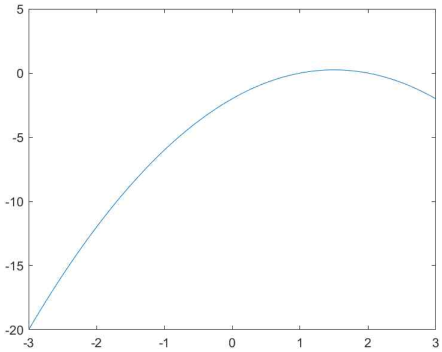
경사점근선은 $y = \frac{x}{2}$ 이다.



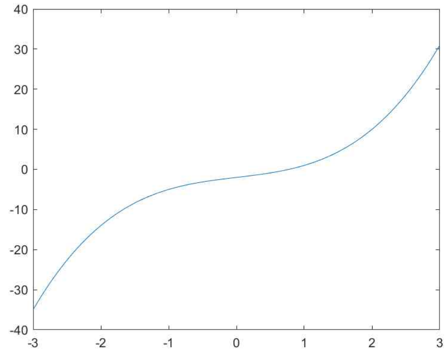
CHAPTER 04 미분의 응용

4.4 연습문제

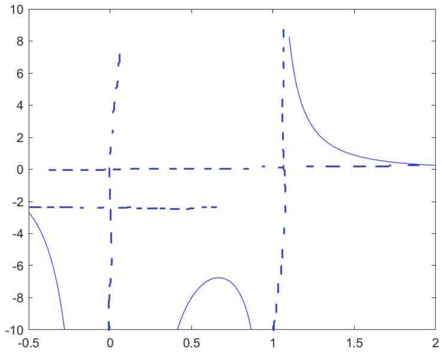
01



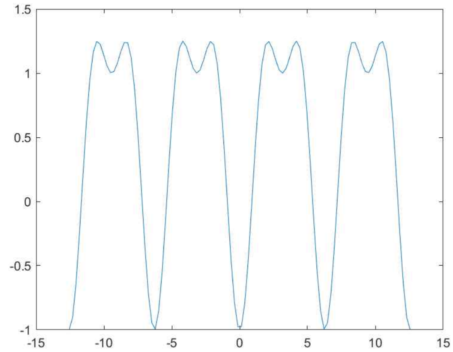
02



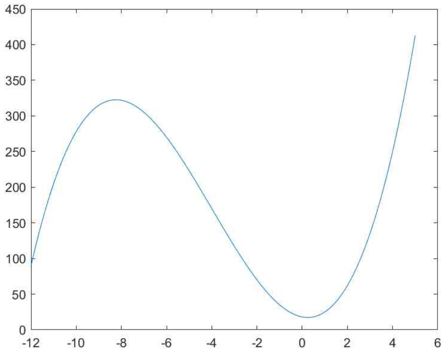
03



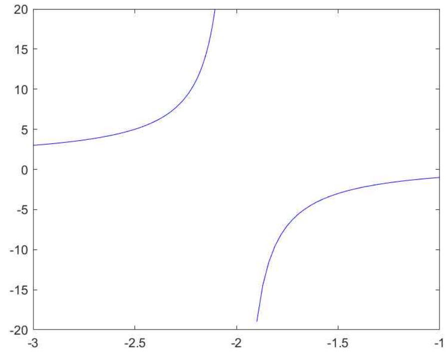
04



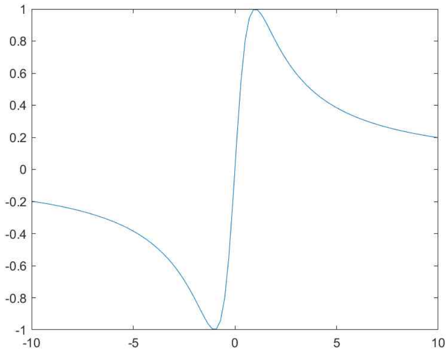
05



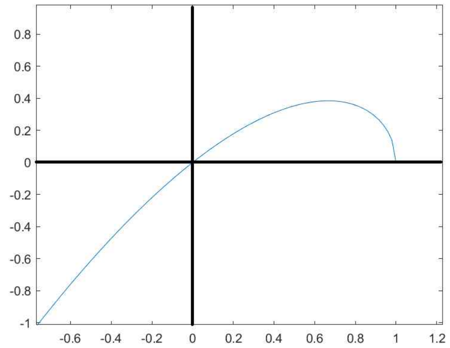
06



07

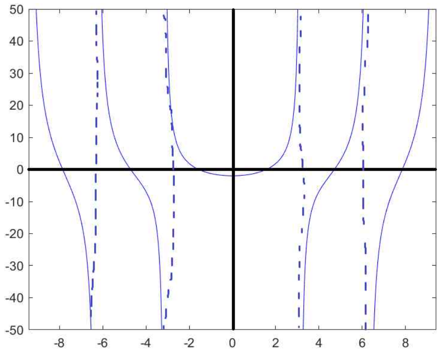


08

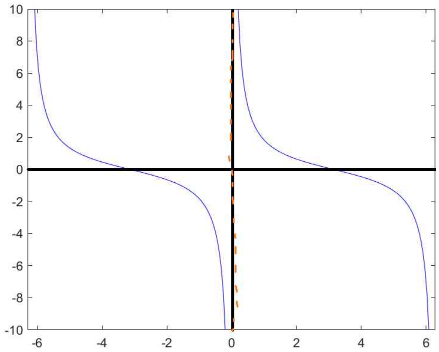


CHAPTER 04 미분의 응용

09

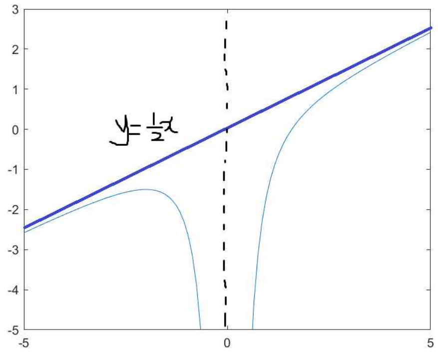


10



11

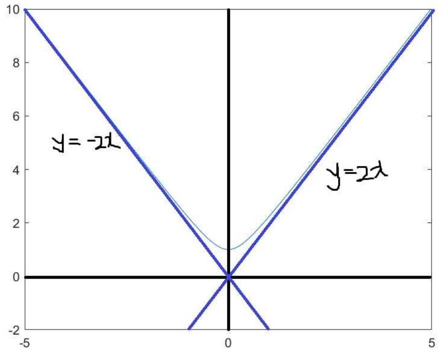
$f(x)=\dfrac{x}{2}-\dfrac{2}{x^2}$ 이므로 경사점근선은 $y=\dfrac{x}{2}$ 이다.



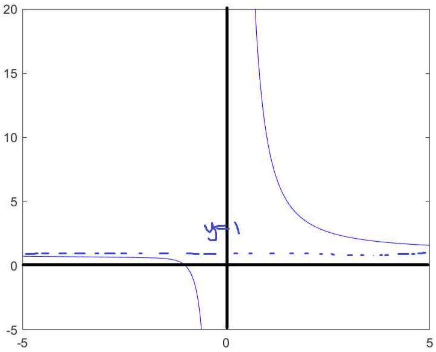
12

$y=\sqrt{4x^2+1}=|2x|\sqrt{1+\dfrac{1}{4x^2}}$ 이므로

경사점근선은 $y=\pm 2x$ 이다.



13



14

c와 상관없이 $x=\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi$에서 변곡점을 가진다.

$c=0$인 경우, $x=2n\pi$에서 극솟값, $x=(2n+1)\pi$에서 극댓값을 가진다.

$c\in[-1,1]$인 경우, $x=\sin^{-1}(-c)\in[0,2\pi]$를 만족하는 두 x값을 x_1, x_2라고 했을 때,

구간 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$ 안에 존재하는 값 x_1에 대하여 $x_1+2n\pi$에서 극솟값을 갖고,

구간 $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 안에 존재하는 값 x_2에 대하여 $x_2+2n\pi$에서 극댓값을 갖는다.

CHAPTER 04 미분의 응용

SECTION 4.5 최적화 문제

유제 4-14

밑면의 길이 $a=5$, 높이 $h=5$

유제 4-15

A 지점에서 곧바로 C 지점까지 전동킥보드를 타고 가는 것이 가장 빠르다.

유제 4-16

높이는 $r\sqrt{2}$, 밑변은 $r\sqrt{2}$이다.

유제 4-17

$N=k$

4.5 연습문제

01

$y=2x+3$

02

직원기둥 모양의 통나무 밑면에 내접하는 직사각형이 밑면인 직육면체 대들보로 만들면 된다.

03

$x=0$

04

$a=10$, $b=10$

05

$r=\sqrt{10\pi}$, $\theta=2$

06

증명 생략.

07

$2\sqrt{2}$

08

구의 반지름을 R, 직원뿔의 반지름을 r, 높이를 h라고 할 때

$h=\frac{4}{3}R$, $r=\sqrt{\frac{5}{3}}R$

09

직사각형의 가로 : 375, 세로 : 375

10

CHAPTER 04 미분의 응용

직사각형 넓이의 최댓값은 r^2

11

직사각형 넓이의 최댓값은 $\frac{r^2}{2}$

12

$\sqrt{2}$

CHAPTER 04 미분의 응용

SECTION 4.6 여러 가지 비율

유제 4-18

한 변이 줄어드는 속도는 $-\frac{1}{60}\mathrm{mm/s}$이다.

유제 4-19

A와 B가 서로 멀어지는 속도는 $6\sqrt{5}\mathrm{km/h}$이다.

유제 4-20

$10e^{-0.2} \approx 8$

유제 4-21

$100 \times 2^{-\frac{2000}{5730}} \approx 79$

4.6 연습문제

01

$15\mathrm{cm^3/min}$

02

$\frac{1}{15}\Omega/\mathrm{s}$

03

$\frac{50+5\sqrt{2}}{52+10\sqrt{2}}$

04

-0.3

05

$\frac{2}{9}\mathrm{m/min}$

06

$-0.3\mathrm{cm^3/s}$

07

약 $69\,^\circ\mathrm{C}$

08

19분 후

09

$N(0) = N_0$

10

증명 생략.

CHAPTER 04 미분의 응용

11

$N(t) = 10 \times 4.2^t$

12

740

13

$\frac{dN}{dt} = 10 \ln(4.2) \times 4.2^t$

14

1.6시간 후

15

$m(t) = 10 \times 2^{-\frac{t}{30}}$

16

$m(50) \approx 3.1\mathrm{mg}$

17

100년

18

$s(t) = t^2 - \cos t + 1$

CHAPTER 04 미분의 응용

SECTION 4.7 선형근사와 미분

유제 4-22

0.995

유제 4-23

$0.15\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$

유제 4-24

상대오차는 $\dfrac{\Delta V}{V}=0.015$이며 백분율오차로 환산하면 1.5%이다.

유제 4-25

근사해 : 2

4.7 연습문제

01

거짓이다.

02

$L(x)=-2x$

03

$L(x)=1-x$이다.

$\sqrt{0.8}\approx 0.9,\ \sqrt{0.98}\approx 0.99$

04

선형근사 : $L(x)=1+\dfrac{x}{4}$

오차 범위 0.1 내에서 정확하게 되는 x값 : 0.4

05

$L(x)=1+\dfrac{5}{3}x$

06

선형근사 : $f(x)\approx 1+\dfrac{5}{3}x$

$\sqrt[3]{1.05}\approx\dfrac{61}{60}$

07

$\dfrac{1}{5}\left\{\left(\dfrac{50}{3}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right\}$

08

$(1.999)^3$의 근삿값은 7.988이다.

09

$dy=\sec^2\!\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

CHAPTER 04 미분의 응용

10

$dy = 1$, $\Delta y = 0.1$

11

$1 < f(0.01) < f(0.1)$

12

증명 생략.

13

최대 오차는 $dV = 80\pi \mathrm{cm}^3$, 상대오차는 $\dfrac{dV}{V} = 0.0075$, 백분율오차는 0.75%다.

14

최대 오차는 $dA = 0.1\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$, 상대오차는 $\dfrac{dA}{A} = 0.004$, 백분율오차는 0.4%다.

15

증명 생략.

CHAPTER 04 미분의 응용

SECTION 4.8 부정형과 로피탈 법칙

유제 4-26

$\frac{1}{4}$

유제 4-27

1

유제 4-26

$\frac{1}{4}$

유제 4-27

1

유제 4-28

0

유제 4-29

0

유제 4-30

0

유제 4-31

$-\frac{1}{2}$

유제 4-32

1

4.8 연습문제

01

거짓이다.

02

∞

03

0

04

2

05

0

06

∞

CHAPTER 04 미분의 응용

07

0

08

$\frac{\pi}{2}$

09

1

10

$-\infty$

11

-1

12

1

13

∞

14

∞

15

$\frac{1}{2}$

16

∞

17

0

18

40

19

증명 생략.