

CHAPTER 08 수열과 급수

SECTION 8.1 수열

유제 8-1

0

유제 8-2

$$\frac{1}{2}$$

유제 8-3

0

8.1 연습문제

01

$\{2n^2 - 1\}$ 과 $1, 7, 17, \dots, 2n^2 - 1$

02

$\{(-1)^n\}$ 과 $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$

03

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n(n+1)} = 0$$

04

수렴, 0

05

수렴, 1

06

수렴, 0

07

수렴, 0

08

발산

09

$$\text{수렴, } \ln \frac{1}{10}$$

10

$$\text{수렴, } \frac{1}{3}$$

11

수렴, 0

12

감소수열, 아래로 유계

13

증가수열, 유계가 아니다.

14

증명 생략

15

증명 생략

16

e

17

1

18

$$\sqrt[3]{e}$$

19

증명 생략

20

증명 생략

SECTION 8.2 급수

유제 8-4

0

유제 8-5

증명 생략

유제 8-6

증명 생략

유제 8-7

증명 생략

유제 8-8

$$\text{수렴, 급수의 합 : } \frac{12}{5}$$

유제 8-9

$$\frac{2}{3}$$

유제 8-10

$$\frac{1}{3}$$

유제 8-11

증명 생략

유제 8-12

증명 생략

CHAPTER 08 수열과 급수

유제 8-13

증명 생략

유제 8-14

증명 생략

유제 8-15

$$\frac{5}{2} + \frac{5\pi^2}{6}$$

8.2 연습문제

01

$$\frac{x}{5-x} \quad (\text{단, } |x| < 5)$$

02

$$\frac{x-1}{6-x} \quad (-4 < x < 6)$$

03

증명 생략

$$\text{합} : 1 + \frac{1}{x^2}$$

04

$$\frac{34}{9}$$

05

$$\frac{68}{9}$$

06

$$\frac{104}{45}$$

07

$$\frac{7}{12}$$

08

발산

09

발산

10

발산

11

$$\frac{9-\pi^2}{6}$$

12

$$\frac{\cos\theta}{2-\cos\theta} + \frac{7\pi^2}{6}$$

13

발산

14

증명 생략

15

$$\frac{1}{2}$$

16

증명 생략

17

증명 생략

CHAPTER 08 수열과 급수

SECTION 8.3 급수의 수렴 판정

유제 8-16

수렴

유제 8-17

발산

유제 8-18

증명 생략

유제 8-19

수렴

유제 8-20

증명 생략

유제 8-21

증명 생략

유제 8-22

증명 생략

유제 8-23

증명 생략

유제 8-24

절대수렴한다.

유제 8-25

수렴

유제 8-26

조건부 수렴

유제 8-27

증명 생략

유제 8-28

증명 생략

유제 8-29

증명 생략

8.3 연습문제

01

증명 생략

02

증명 생략

03

수렴

04

수렴

05

발산

06

수렴

07

수렴

08

수렴

09

수렴

10

수렴

11

$p > 1$

12

$p > 1$

13

증명 생략, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = 0.a_1a_2 \cdots$

14

증명 생략

15

증명 생략

16

조건부 수렴

17

절대수렴

18

발산

19

절대수렴

20

발산

21

절대수렴

22

절대수렴

23

절대수렴

24

조건부 수렴

CHAPTER 08 수열과 급수

25

조건부 수렴한다.

26

절대수렴

27

조건부 수렴

28

증명 생략

29

증명 생략

CHAPTER 08 수열과 급수

SECTION 8.4 멱급수

유제 8-30

증명 생략

유제 8-31

증명 생략

유제 8-32

$-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}$ 에서 수렴

유제 8-33

수렴반지름 : $R = 5$

수렴구간 : $(-5, 5)$

유제 8-34

수렴반지름 : ∞

수렴구간 : $(-\infty, \infty)$

08

수렴반지름 $R = 3$

수렴구간 $(0, 6)$

09

수렴반지름 $R = \frac{1}{3}$

수렴구간 $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$

10

수렴반지름 $R = \frac{1}{3}$

수렴구간은 $\left[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$

11

모든 실수 x 에 대하여 수렴

수렴구간 \mathbb{R}

8.4 연습문제

01

증명 생략

02

증명 생략

03

수렴반지름 $R = \frac{1}{3}$

수렴구간 $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$

04

수렴반지름 $R = 1$

수렴구간 $[-1, 1)$

05

수렴반지름 $R = 2$

수렴구간은 $(0, 4)$

06

수렴반지름 $R = 3$

수렴구간은 $(-3, 3]$

07

수렴반지름 $R = 0$

$x = \frac{1}{4}$ 에서만 수렴

CHAPTER 08 수열과 급수

SECTION 8.5 함수의 멱급수 표현

유제 8-35

수렴구간 : $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

함수표현 : $\sum_{n=0}^{\infty} (-2x)^n = \frac{1}{1+2x}$

유제 8-36

멱급수표현 : $\ln(1+3x) = 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n+1} x^{n+1}$

수렴반지름 : $\frac{1}{3}$

유제 8-37

멱급수표현 : $\frac{1}{(1+2x)^2} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n+1} x^{n+1}$

수렴반지름 : $\frac{1}{2}$

유제 8-38

$\tan^{-1} 2x = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{2n+1} x^{2n+1}$

유제 8-39

$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$

8.5 연습문제

01

수렴구간 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \frac{1}{1-2x}$

02

수렴구간 $(-3, 3)$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n} = \frac{3}{3-x}$

03

수렴구간 $(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$

$\sum_{n=0}^{\infty} (-5)^n x^n = \frac{1}{1+5x}$

04

$\frac{1}{(1+x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}$

수렴반지름 1

05

$\frac{x}{4+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} x^{2n+1}$

수렴구간 $(-2, 2)$

06

$\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}$

07

$\frac{x}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} x^{n-1}$

08

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{2^{n+1}(n+1)} x^{n+1} + \ln 2$

09

$\int \frac{x}{1-x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+2} x^{2n+2} + C$

CHAPTER 08 수열과 급수

10

$$\int x \tan^{-1}(2x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)(2n+3)} x^{2n+3} + C$$

11

$$\int \frac{1}{(1+x)^2} dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n + C$$

12

$$\int (x^2+1) \tan^{-1} x dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} x^{2n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+4)} x^{2n+4} + C$$

13

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$$

수렴구간 $(-1, 1)$

14

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n} = -\frac{1}{2} \ln |1-x|$$

수렴구간 $(-1, 1)$

15

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \tan^{-1} x$$

16

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{2n+1} = \frac{x}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$$

CHAPTER 08 수열과 급수

SECTION 8.6 테일러 급수와 매클로린 급수

유제 8-40

매클로린 급수 : $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n}{n!} x^n$

수렴반지름 : 수렴반지름

유제 8-41

$$\sin 2x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

유제 8-42

증명 생략

유제 8-43

증명 생략

유제 8-44

$$x \sin 2x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1} x^{2n+2}}{(2n+1)!}$$

유제 8-45

$$\int e^{-2x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{(2n+1)n!} x^{2n+1} + C$$

유제 8-46

- 2

유제 8-47

$$e^{2x} \sin 2x = 2x + 4x^2 + \frac{8}{3}x^3 + \dots$$

8.6 연습문제

01

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2n}$$

02

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} (x - \pi)^{2n}$$

03

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!} (x-1)^n$$

04

증명 생략

05

증명 생략

06

증명 생략

07

증명 생략

08

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (c \text{는 } 0 \text{과 } x \text{ 사이의 적당한 실수})$$

증명 생략

09

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$$

$$R = \infty$$

10

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n!} x^n$$

$$R = \infty \text{ 이다.}$$

11

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+3}}{n!}$$

$$R = \infty$$

12

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n}{n!} x^{n+1}$$

$$R = \infty$$

13

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} 4^n x^{2n}$$

$$R = \infty$$

14

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+1} (2n+1)!} x^{4n+3}$$

$$R = \infty$$

15

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

16

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

17

CHAPTER 08 수열과 급수

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{n+3}$$

$$R=1$$

18

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(4n+2)} x^{4n+2} + C$$

19

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)} x^{2n+1} + C$$

20

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)n!} x^{2n+1} + C$$

21

$$0$$

22

$$\frac{1}{5}$$

23

$$\frac{1}{12}$$

24

$$f(x) = x - \frac{7}{6}x^3 + \frac{81}{5!}x^5 + \cdots$$

25

$$f(x) = x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$$