MSE, 이공계생을 위한 확률과 통계

[연습문제 답안 이용 안내]

Chapter 04 연습문제 해답

4.1

(a) $f(x) = {}_5C_x\left(\frac{3}{4}\right)^x\left(\frac{1}{4}\right)^{5-x}$, $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

(b) $P(X = 3) = {}_5C_3\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^2 \fallingdotseq 0.2637$

(c) $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2)$

$$= 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$$

$$= 1 - {}_5C_0\left(\frac{3}{4}\right)^0\left(\frac{1}{4}\right)^5 - {}_5C_1\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^4$$

$$= 1 - 0.015625 = 0.984375$$

(d) $E(X) = 5 \times \frac{3}{4} = 3.75$

$Var(X) = 5 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = 0.9375$

4.3

각 문제의 정답 확률이 $\frac{1}{2}$ 이므로 5 문제 중 임의로 답을 하여 정답인 무제 수를 X라고 하면 X는 $b\left(5, \frac{1}{2}\right)$인 이항분포를 따른다.

따라서 구하는 확률은 $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2)_3 = 1 - 0.5 = 0.5$ 이 된다.

4.5

회복한 사람의 수를 X라 하면 $X \sim b(6, 0.6)$이므로 구하고자 하는 확률은 다음과 같다.

$$P(X = 0) = {}_6C_0(0.6)^0(0.4)^6 \fallingdotseq 0.0041$$

4.7

불량품의 수를 X라 할 때, 구하고자 하는 확률은 다음과 같다.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$$

$$= 1 - {}_6C_0(0.1)^0(0.9)^6$$

$$\fallingdotseq 0.4686$$

4.9

R을 붉은색 전등의 수, G를 초록색 전등의 수, 그리고 B를 파란색 전등의 수라고 하면 구하고자 하는 확률은 다음과 같다.

$$P(R=2, G=1, B=2) = \frac{5!}{2!1!2!}(0.5)^2(0.2)^1(0.3)^2 = 0.135$$

4.11

주어진 시간 또는 정해진 영역 내에서 일어나는 사건의 횟수는 푸아송분포를 따른다.

4.13

(a)

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx}\frac{m^x e^{-m}}{x!} \\ &= e^{-m}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(me^t)^x}{x!} \\ &= e^{-m}e^{me^t} \\ &= e^{m(e^t-1)} \end{aligned}$$

(b) $M_X'(t) = me^t e^{m(e^t-1)}$

$$\begin{aligned} E(X) &= M_X'(0) \\ &= m \end{aligned}$$

(c) $M_X''(t) = (me^t)^2 e^{m(e^t-1)} + me^t e^{m(e^t-1)}$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= M_X''(0) \\ &= m^2 + m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(X) &= M_X''(0) - [M_X'(0)]^2 \\ &= m^2 + m - m^2 \\ &= m \end{aligned}$$

4.15

사고를 낸 건수를 X라 하면, 구하고자 하는 확률은 다음과 같다.

$$P(X=0) = \frac{e^{-0.3}0.3^0}{0!} = e^{-0.3} \fallingdotseq 0.741$$

4.17

$X \sim P(2)$, $Y \sim P(3)$이면 $Z = X + Y$는 $P(5)$를 따른다.

4.19

(a)

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} q^{x-1} p \\ &= \frac{p}{q} \sum_{x=1}^{\infty} (q e^t)^x \\ &= \frac{p}{q} \frac{q e^t}{1 - q e^t} \\ &= \frac{p e^t}{1 - q e^t} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} M_X'(t) &= \frac{p e^t (1 - q e^t) - p e^t (-q e^t)}{(1 - q e^t)^2} \\ &= \frac{p e^t}{(1 - q e^t)^2} \end{aligned}$$

$$E(X) = M_X'(0) = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$$

(c)

$$\begin{aligned} M_X''(t) &= \frac{p e^t (1 - q e^t)^2 - p e^t \cdot 2(1 - q e^t)(-q e^t)}{(1 - q e^t)^4} \\ &= \frac{p e^t (1 - q e^t) + 2 p e^t q e^t}{(1 - q e^t)^3} \\ &= \frac{p e^t + p e^t q e^t}{(1 - q e^t)^3} \end{aligned}$$

$$E(X^2) = M_X''(0) = \frac{p + pq}{(1-q)^3} = \frac{1+q}{p^2}$$

$$Var(X) = M_X''(0) - [M_X'(0)]^2$$

$$= \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

4.21

초기하분포는 모집단의 크기 N이 큰 경우에 근사적으로 이항분포를 따른다.

4.23

(a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}, & 0 \le x \le 3 \\ 0, & x < 0 \text{ 또는 } x > 3 \end{cases}$

(b)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{x}{3}, & 0 \le x \le 3 \\ 1, & 3 < x \end{cases}$$

(c) $E(X) = \dfrac{0+3}{2} = \dfrac{3}{2}$

$$Var(X) = \frac{(3-0)^2}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

4.25

(a)

$$E(X) = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_a^b = \left(\frac{1}{b-a}\right)\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right) = \frac{a+b}{2}$$

(b)

$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$에서

$$E(X^2) = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_a^b$$

$$= \left(\frac{1}{b-a}\right)\left(\frac{b^3-a^3}{3}\right) = \frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

이고, $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ 이므로

$$Var(X) = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$= \frac{(b-a)^2}{12}$$

(c)

$$M_X(t) = \int_a^b e^{tx}\frac{1}{b-a} dx$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{e^{tx}}{t}\right]_a^b$$

$$= \frac{e^{bt}-e^{at}}{(b-a)t}, \quad t \neq 0$$

4.27

$$P(70 \le X \le 80) = P\left(\frac{70-75}{7} \le \frac{X-75}{7} \le \frac{80-75}{7}\right)$$
$$\fallingdotseq P(-0.71 \le Z \le 0.71)$$
$$= 2P(0 \le Z \le 0.71)$$
$$= 2 \times 0.2611 = 0.5222$$

따라서, 구하는 학생 수는 $500 \times 0.5222 \fallingdotseq 261$ (명)이다.

4.29

(a) $$M_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\{x^2 - 2(\mu + t\sigma^2)x + (\sigma + t\sigma^2)^2 - (\mu + t\sigma^2)^2 + \mu^2\}}{2\sigma^2}} dx$$

$$= e^{\frac{(\mu + t\sigma^2)^2 - \mu^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x - \mu - t\sigma^2)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$= e^{(t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2})}$$

(b) $$M_X'(t) = (\mu + t\sigma^2)\, e^{(t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2})}$$

$$E(X) = M_X'(0) = \mu$$

(c) $$M_X''(t) = \sigma^2 e^{(t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2})} + (\mu + t\sigma^2)^2 e^{(t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2})}$$

$$E(X^2) = M_X''(0) = \mu^2 + \sigma^2$$

$$Var(X) = M_X''(0) - [M_X'(0)]^2 = \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

4.31

$\mu = 400$, $\sigma = 50$ 이므로

$$P(450 \leq X \leq 500) = P\left(\frac{450-400}{50} \leq Z \leq \frac{500-400}{50}\right)$$
$$= P(1 \leq Z \leq 2)$$
$$= 0.9772 - 0.8413 = 0.1359$$

이다. 따라서 직업에 적당한 점수는 상위 13.59%에 해당한다.

4.33

$$P(X \leq 470) = P\left(\frac{X-500}{30} \leq \frac{470-500}{30}\right)$$
$$= P(Z \leq -1)$$
$$= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1)$$
$$= 0.5 - 0.3413 = 0.1587$$

4.35

$$E(W) = E(X) + E(Y) = \mu_1 + \mu_2$$
$$Var(W) = Var(X) + Var(Y) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$$
$$\Rightarrow W \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

4.37

확률밀도함수 $f(x)$ 가 지수분포의 함수이므로, 구하는 평균수명은

$E(X) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{1/200} = 200$ (시간)이다.

4.39

$$P(X < 1) = \int_0^1 f(x)dx$$
$$= [-e^{-0.15x}]_0^1$$
$$= 1 - e^{-0.15}$$
$$\fallingdotseq 1 - 0.861 = 0.139$$

4.41

(a) $M_X(t) = \int_0^\infty e^{tx} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx$ 에서 $y = \frac{1-\beta t}{\beta} x$, $t < \frac{1}{\beta}$ 라 하면,

$x = \frac{\beta}{1-\beta t} y$ 이고, $dx = \frac{\beta}{1-\beta t} dy$ 이므로

$$M_X(t) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \left(\frac{\beta y}{1-\beta t}\right)^{\alpha-1} e^{-y} \frac{\beta}{1-\beta t} dy$$

$$= \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \left(\frac{\beta}{1-\beta t}\right)^\alpha \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y} dy$$

$$= \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \left(\frac{\beta}{1-\beta t}\right)^\alpha \Gamma(\alpha)$$

$$= (1-\beta t)^{-\alpha}$$

(b) $M_X{}'(t) = -\alpha(1-\beta t)^{-\alpha-1}(-\beta)$

$E(X) = M_X{}'(0)$

$= \alpha\beta$

(c) $M_X{}''(t) = \alpha\beta(-\beta)(-\alpha-1)(1-\beta t)^{-\alpha-2}$

$E(X^2) = M_X{}''(0)$

$= \alpha\beta^2(\alpha+1)$

$Var(X) = M_X{}''(0) - [M_X{}'(0)]^2$

$= \alpha\beta^2(\alpha+1) - \alpha^2\beta^2$

$= \alpha\beta^2$

4.43

$X \sim b(720, \frac{1}{6})$ 이므로

$\mu = np = 720 \times \frac{1}{6} = 120$

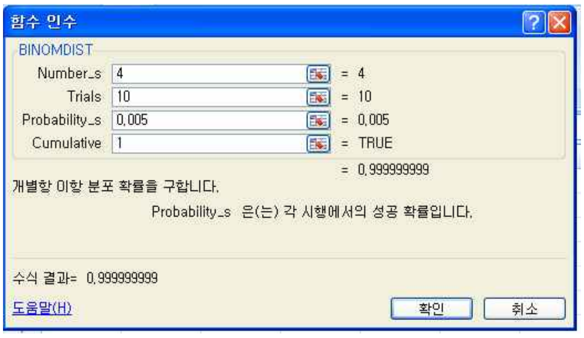
$\sigma^2 = npq = 720 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = 100$ 이다.

그러므로, X는 근사적으로 $N(120, 10^2)$을 따른다.

4.45

엑셀에서 BINOMDIST 함수 (=BINOMDIST(발생 건수, 시행 횟수, 확률, 누적확률여부))를 이용한다.

Numbers에 4, Trials 에 10, Probability에 0.05를 넣고 Cumulative에 true 또는 1을 입력하고 확인을 하면 $X \sim b(10, 0.5)$인 이항분포로부터 확률 $P(X \le 4)$을 얻는다.



$$
\begin{aligned}
P(2 \le X \le 4) &= P(X \le 4) - P(X \le 1) \\
&= 0.999936 - 0.913862 = 0.086075
\end{aligned}
$$