MSE, 이공계생을 위한 확률과 통계

[연습문제 답안 이용 안내]

Chapter 03 연습문제 해답

3.1

(a)

X	0	1	2	합
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	1

(b)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{3} & 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \le x < 2 \\ 1 & x \ge 2 \end{cases}$$

(c) $P(X \le 1.5) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

(d) $P(1 \le X < 4) = P(X=1) + P(X=2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$

(e) $E(X) = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$

(f) $E(Y) = E(10X+5) = 10E(X) + 5 = 10 \times \frac{7}{6} + 5 = \frac{50}{3}$

(g) $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$$= 0^2 \times \frac{1}{3} + 1^2 \times \frac{1}{6} + 2^2 \times \frac{1}{2} - \left(\frac{7}{6}\right)^2 = \frac{29}{36}$$

(h) $Var(Y) = Var(2X+1) = 4Var(X) = 4 \times \frac{29}{36} = \frac{29}{9}$

3.3

표본공간 $\Omega = \{(HH), (HT), (TH), (TT)\}$이므로, 확률변수 X가 취할 수 있는 값은 0, 1, 2가 되며 이에 따르는 확률은 각각 다음과 같다.

$$P(X=0) = \frac{1}{4}, \quad P(X=1) = \frac{1}{2}, \quad P(X=2) = \frac{1}{4}$$

X	0	1	2	합
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

3.5

(a)

X	1	3	합
$h(x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

(b)

Y	4	10	합
$g(y_j)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

(c) $E(X) = \sum_i x_i h(x_i) = 1 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{2} = 2$

$$Var(X) = \sum_i x_i^2 h(x_i) - [E(X)]^2$$

$$= 1^2 \times \frac{1}{2} + 3^2 \times \frac{1}{2} - 2^2 = 1$$

(d) $E(Y) = \sum_j y_j g(y_j) = 4 \times \frac{1}{2} + 10 \times \frac{1}{2} = 7$

$$Var(Y) = \sum_j y_j^2 g(y_j) - [E(Y)]^2$$

$$= 4^2 \times \frac{1}{2} + 10^2 \times \frac{1}{2} - 7^2 = 9$$

(e) $E(XY) = \sum_i \sum_j x_i y_j f(x_i, y_j)$

$$= 1 \times 4 \times \frac{1}{4} + 1 \times 10 \times \frac{1}{4} + 3 \times 4 \times \frac{1}{4} + 3 \times 10 \times \frac{1}{4} = 14$$

(f) $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

$$= 14 - 2 \times 7 = 0$$

(g) $\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{0}{\sqrt{1}\sqrt{9}} = 0$

(h) $f(x_i, y_j) = h(x_i) g(y_j)$ 이므로 X와 Y는 독립이다.

3.7

$P(X = 100) = \frac{1}{100} = 0.01$, $P(X = 50) = \frac{4}{100} = 0.04$,

$P(X = 10) = \frac{5}{100} = 0.05$, $P(X = 1) = \frac{10}{100} = 0.1$,

$P(X = 0) = 1 - P(X = 100) - P(X = 50) - P(X = 10) - P(X = 1) = 1 - 0.2 = 0.8$

여기서, $P(X = 0)$은 복권이 당첨되지 않을 확률이다.

X (만 원)	0	1	10	50	100
$P(X = x)$	0.8	0.1	0.05	0.04	0.01

3.9

$$E(X) = \frac{1}{6}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2) = \frac{91}{6}$$

3.11

$Y = X^2$의 관계로부터 확률변수 Y의 값은 1, 4 이며 이에 대응하는 $P(Y=y)$는 각각 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ 이 된다. 즉,

$$P(Y=1) = P(X=-1) + P(X=1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(Y=4) = P(X=-2) + P(X=2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

y_j	1	4	합
$P(Y=y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

3.13

(a) $a=0.1$, $b=0.1$, $c=0.07$

(b) $0.14 = f(0,-1) \neq f_1(0)\cdot f_2(-1) = 0.4\times 0.3 = 0.12$이므로 독립이 아니다.

(c) $X+Y=0$인 되는 경우는 (-1, 0), (0, 0), (1, -1)인 경우이고, $X-Y=2$인 경우는 (1, -1)인 경우이다. 따라서 구하는 확률 $P(X+Y=0,\ X-Y=2) = P(1,-1) = 0.07$이다.

3.15

$\mu_X = 3.6$, $\sigma = 1.2$이므로

$E(X-\mu_X)^3 = \sum_{x=0}^{6}(x-3.6)^3 f(x) \fallingdotseq -0.288$, $E(X-\mu_X)^4 = \sum_{x=0}^{6}(x-3.6)^4 f(x) \fallingdotseq 5.587$

따라서 왜도 $\theta = -\frac{0.288}{1.2^3} \fallingdotseq -0.167$, 첨도 $\kappa = \frac{5.587}{1.2^4} \fallingdotseq 2.694$.

그러므로 분포는 왜도가 음이므로 우측으로 치우치고, 첨도가 3보다 작으므로 표준정규분포보다 평평하다.

3.17

(a) $\int_0^6 c\left(x-\frac{x^2}{6}\right)dx = 1$로부터 $c=\frac{1}{6}$

(b) $P(4<X<5)=\int_4^5 \frac{1}{6}\left(x-\frac{x^2}{6}\right)dx=\frac{5}{27}$

(c) $5m^3/s$의 용량을 가진 것으로 교체했을 때 유출수가 넘칠 확률은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} P(X>5) &= 1-P(X\le 5) \\ &= 1-\int_0^5 \frac{1}{6}\left(x-\frac{x^2}{6}\right)dx \\ &= 1-\frac{25}{27}=\frac{2}{27} \end{aligned}$$

3.19

(a) $E(X)=\int_3^6 x\cdot\frac{24}{x^3}dx=\int_3^6 \frac{24}{x^2}dx=4$

(b) $$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2)-\{E(X)\}^2 \\ &= \int_3^6 \frac{24}{x}dx-4^2=24\ln 2-16 \end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned} P[X>5.5] &= \int_{5.5}^6 \frac{24}{x^3}dx \\ &= 12\left(\frac{1}{5.5^2}-\frac{1}{36}\right)\fallingdotseq 0.063 \end{aligned}$$

3.21

X	P(X)	XP(X)	(X^2)P(X)
0	0.125	0	0
1	0.375	0.375	0.375
2	0.375	0.75	1.5
3	0.125	0.375	1.125
	합계	1.5	3
	평균	1.5	
	분산	0.75	
	표준편차	0.866025	